

TD 27 : Espaces vectoriels

Structure d'espace vectoriel

1 ★ Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels :

- 1) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 6y - 3z = 0\}$
- 2) $E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ est convergente}\}$
- 3) $E = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(2) = 0\}$
- 4) $E = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A_{11} = 0\}$

2 ★★ Montrer que les ensembles suivants **ne sont pas** des espaces vectoriels :

- 1) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 6y - 3z = 1\}$
- 2) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$
- 3) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$
- 4) $E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \geq 0\}$
- 5) $E = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) = 2\}$
- 6) $E = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P = 0 \text{ ou } \deg P = 1\}$
- 7) $E = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A^2 = A\}$
- 8) $E = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0)f(1) \leq 0\}$

3 ★★ Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

- 1) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$
- 2) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$
- 3) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z \in \mathbb{Q}\}$
- 4) $E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ est bornée}\}$
- 5) $E = GL_n(\mathbb{K})$
- 6) $E = \left\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \mid f'(0) = \int_0^1 f(t) dt\right\}$
- 7) $E = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ est monotone}\}$
- 8) $E = \{F \in \mathbb{K}(X) \mid \deg F \leq 0\}$

4 ★★ L'ensemble $i\mathbb{R}$ est-il un $\mathbb{R}$ -e.v. ? et un $\mathbb{C}$ -e.v. ?

5 ★★ Soit A l'ensemble des suites réelles arithmétiques. Est-ce que A est un e.v. ?

Soit G l'ensemble des suites réelles géométriques. Est-ce que G est un e.v. ?

6 ★★★ Soit F et G deux s.e.v. d'un $\mathbb{K}$ -e.v. E . Montrer que $F \cup G$ est un s.e.v. si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Familles libres, génératrices, bases

7 ★★ Montrer que les familles suivantes sont libres :

- 1) $\mathcal{F} = ((1, 2, -5, 4), (2, 3, -3, 1))$
- 2) $\mathcal{F} = ((1, 2, -1), (0, -3, 1), (4, 0, 5))$
- 3) $\mathcal{F} = (X + 1, X^2 + 1, X^2 + X)$
- 4) $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ avec $f_k : x \mapsto e^{kx}$ pour tout $k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$.
- 5) $\mathcal{F} = (A, B, C)$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

8 ★★ Montrer que les familles suivantes sont génératrices (on précisera parfois l'ensemble E si le contexte ne suffit pas à le déterminer) :

- 1) $\mathcal{F} = ((1, 0), (0, 1), (1, 1))$
- 2) $\mathcal{F} = ((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1))$
- 3) $\mathcal{F} = (X^2, X^2 + X + 1, X^2 - X + 1)$ avec $E = \mathbb{K}_2[X]$.

9 ★★ Trouver une famille génératrice des s.e.v. suivants :

- 1) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$
- 2) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$
- 3) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = y - z = 0\}$
- 4) $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y = 2z = 4t\}$

10 ★★ Trouver une base des s.e.v. suivants :

- 1) $F = \mathcal{D}_2(\mathbb{R})$, i.e. l'ensemble des matrices diagonales.
- 2) $F = \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, i.e. celui des matrices symétriques.
- 3) $F = \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$, i.e. celui des matrices antisymétriques.

11 ★★ (Archi-classique) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P_0, \dots, P_n$ des polynômes tels que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\deg P_k = k$. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille libre.

12 ★★ On considère $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{Q}$ -e.v. Montrer que la famille $(1, \sqrt{2})$ est libre, puis que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est libre. On pourra utiliser sans démonstration que $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$ si $n \in \mathbb{N}$ n'est pas le carré d'un entier.

13 ★★ Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées :

- 1) $\mathcal{F} = (f, g, h)$ avec :

$$f : x \mapsto \cos x, \quad g : x \mapsto \cos(3x), \quad h : x \mapsto \cos^3(x)$$

- 2) $\mathcal{F} = ((1, 1, a), (1, a, 1), (a, 1, 1))$ avec $a \in \mathbb{R}$.
- 3) $\mathcal{F} = ((1, a, 2a^2), (a, 2a^2, 3a^3), (a^2, 3a^3, 4a^4))$ avec $a \in \mathbb{R}$.

14 ★★★ Montrer que les familles suivantes sont libres :

- 1) $\mathcal{F} = (x \mapsto e^{ax})_{a \in \mathbb{R}}$
- 2) $\mathcal{F} = \left(\mathbb{1}_{[a, +\infty[} \right)_{a \in \mathbb{R}}$
- 3) $\mathcal{F} = \left(\frac{1}{X-a} \right)_{a \in \mathbb{R}}$

Somme de s.e.v.

15 ★ Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u, v \in E$. Montrer que $\text{Vect}(u) + \text{Vect}(v) = \text{Vect}(u, v)$.

16 ★ Dans $\mathbb{R}[X]$, on considère

$$E_1 = \text{Vect}(X^2 + 1, X^4 - 1) \quad E_2 = \text{Vect}(X^2, X^4 + X)$$

La somme $E_1 + E_2$ est-elle directe ?

17 ★★ On considère les ensembles $A = \{(x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$.

- 1) Montrer que A et B sont des sous-espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
- 2) Écrire les vecteurs $u = (1, 2, 1)$ et $v = (2, 3, -1)$ sous la forme $a + b$ avec $a \in A$ et $b \in B$.

18 ★★ Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. Soit F et G deux s.e.v. de E . Montrer que $F \cap G = F + G \iff F = G$.

19 ★★ Montrer que $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}) = F \oplus G$, avec

$$F := \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$$

$$G := \{x \mapsto ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

20 ★★ Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On considère $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires et $\mathcal{I}$ celui des fonctions impaires.

- 1) Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des s.e.v. de E .
- 2) Montrer que $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$. Indication : on pourra raisonner par analyse-synthèse.

21 ★★ Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et

$$F = \mathbb{R}_1[X] \quad G = \{P \in E \mid P(1) = P'(1) = 0\}$$

- 1) Montrer que F et G sont des s.e.v. supplémentaires dans E . Indication : on pourra considérer une division euclidienne par $(X - 1)^2$.
- 2) Déterminer la décomposition des polynômes $1, X, X^2$ et X^3 selon F et G .